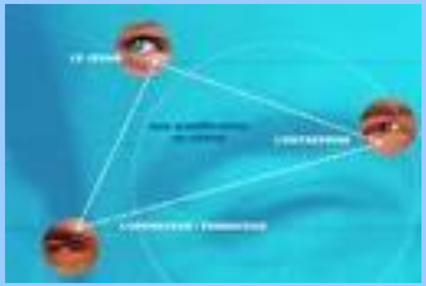
RELASI DAN FUNGSI

Nur Hasanah, M.Cs



Relasi

- Relasi biner *R* antara himpunan *A* dan *B* adalah himpunan bagian dari $A \times B$.
- Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- *a R b* adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya *a* dihubungankan dengan *b* oleh *R*
- *a* ~~*R*~~ *b* adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya *a* tidak dihubungkan oleh *b* oleh relasi *R*.
- Himpunan *A* disebut daerah asal (***domain***) dari *R*, dan himpunan *B* disebut daerah hasil (***range***) dari *R*.

Contoh: Misalkan

A = {Amir, Budi, Cecep}, B = {IF221, IF251, IF342, IF323}

$A \times B$ = {(Amir, IF221), (Amir, IF251), (Amir, IF342), (Amir, IF323), (Budi, IF221), (Budi, IF251), (Budi, IF342), (Budi, IF323), (Cecep, IF221), (Cecep, IF251), (Cecep, IF342), (Cecep, IF323) }

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu:

R = {(Amir, IF251), (Amir, IF323), (Budi, IF221), (Budi, IF251), (Cecep, IF323) }

- Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,
- A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R.
- (Amir, IF251) $\in R$ atau Amir R IF251
- (Amir, IF342) $\notin R$ atau Amir $\cancel{R}$ IF342.

Contoh:

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.

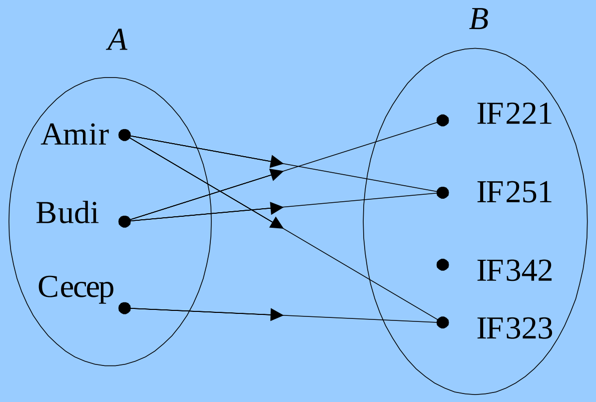
Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan:

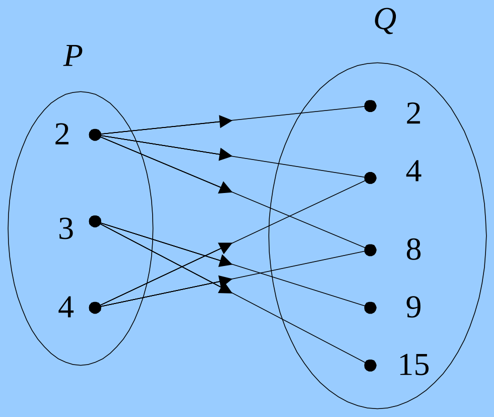
$(p, q) \in R$ jika p habis membagi q, maka kita peroleh:

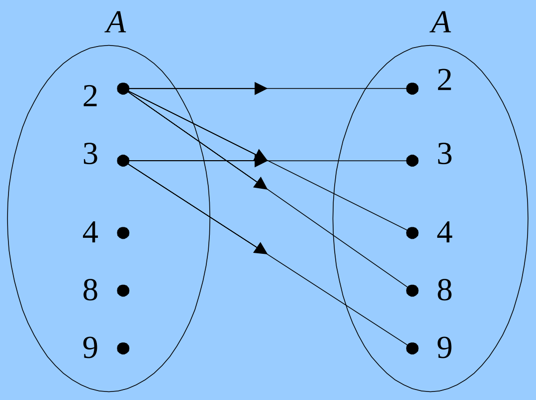
$\boldsymbol{R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}}$

Representasi Relasi

1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah







Representasi Relasi

2. Representasi Relasi dengan Tabel

Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 1

A	*B*
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 3

A	*A*
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

Representasi Relasi

3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

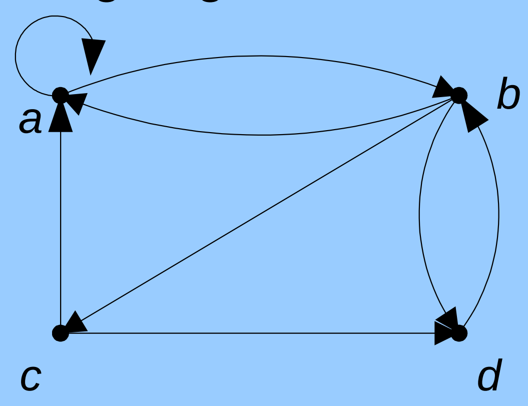
Representasi Relasi

4. Representasi Relasi dengan Graf Berarah

- Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga **simpul** atau ***vertex***), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan **busur (*arc*).**
- Pasangan terurut (*a*, *a*) dinyatakan dengan busur dari simpul *a* ke simpul *a* sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Contoh:

Misalkan *R* = {(*a*, *a*), (*a*, *b*), (*b*, *a*), (*b*, *c*), (*b*, *d*), (*c*, a), (*c*, *d*), (*d*, *b*)} adalah relasi pada himpunan {*a*, *b*, *c*, *d*}.
R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



Sifat-sifat Relasi Biner

1. **Refleksif** (*reflexive*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.
- Relasi R pada himpunan A **tidak refleksif** jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh :

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

- Relasi $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}}$ bersifat **refleksif** karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), dan (4, 4).
- Relasi $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}}$ **tidak bersifat refleksif** karena $(3, 3) \notin R$.

Sifat-sifat Relasi Biner

Contoh: Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

R **:** ***x*** **lebih besar dari** ***y*****,** ***S*** **:** ***x*** **+** ***y*** **= 5,** ***T*** **: 3*****x*** **+** ***y*** **= 10**

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan (2, 2), bukan anggota *R*, *S*, maupun *T*.

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau m_{ii} = 1, untuk *i* = 1, 2, …, *n*,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

Sifat-sifat Relasi Biner

2. **Menghantar** (*transitive*)

Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh:

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di didefinisikan pada himpunan A, maka:

- $\boldsymbol{R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}}$ bersifat menghantar.
- $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}}$ tidak manghantar karena $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$, tetapi $(2, 2) \notin R$, begitu juga $(4, 2)$ dan $(2, 3) \in R$, tetapi $(4, 3) \notin R$.
- $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}}$ jelas menghantar
- $\boldsymbol{R = \{(1, 2), (3, 4)\}}$ menghantar karena tidak ada $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.
- Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti $\boldsymbol{R = \{(4, 5)\}}$ selalu menghantar.

Sifat-sifat Relasi Biner

Contoh: Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

***R* : *x* lebih besar dari *y*, *S* : *x* + *y* = 6, *T* : 3*x* + *y* = 10**

- *R* adalah relasi menghantar karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$.
- *S* tidak menghantar karena, misalkan (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota *S* tetapi $(4, 4) \notin S$.
- $T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$ tidak menghantar.

- Relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya
- Sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari *a* ke *b* dan dari *b* ke *c*, maka juga terdapat busur berarah dari *a* ke *c*.

Sifat-sifat Relasi Biner

3. Setangkup (*symmetric*) dan
Tolak-setangkup (*antisymmetric*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk $a, b \in A$.
- Relasi R pada himpunan A **tidak setangkup** jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$.

- Relasi R pada himpunan A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a, b \in A$ disebut **tolak-setangkup**.
- Relasi R pada himpunan A **tidak tolak-setangkup** jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.

Sifat-sifat Relasi Biner

Contoh: Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R didefinisikan pada himpunan A, maka

- Relasi $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}}$ bersifat setangkup. Di sini $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$, begitu juga $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$.
- Relasi $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}}$ tidak setangkup karena $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 2) \notin R$.
- Relasi $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}}$ tolak-setangkup karena $1 = 1$ dan $(1, 1) \in R$, $2 = 2$ dan $(2, 2) \in R$, dan $3 = 3$ dan $(3, 3) \in R$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.
- Relasi $\boldsymbol{R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}}$ tolak-setangkup. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.

Bagaimana dengan Relasi berikut?

- Relasi $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$
- Relasi $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$
- Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$

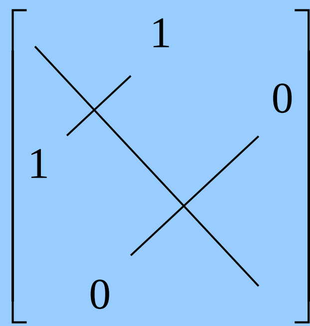
Sifat-sifat Relasi Biner

Contoh: Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

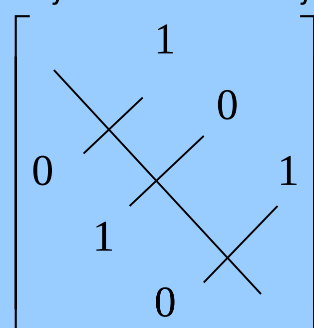
***R* : *x* lebih besar dari *y*,   *S* : *x* + *y* = 6,   *T* : 3*x* + *y* = 10**

- *R* bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5.
- *S* relasi setangkup karena (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota *S*.
- *T* tidak setangkup karena, misalkan (3, 1) adalah anggota *T* tetapi (1, 3) bukan anggota *T*.
- *S* bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan $(4, 2) \in S$ dan $(4, 2) \in S$ tetapi $4 \neq 2$.
- Relasi *R* dan *T* keduanya tolak-setangkup (tunjukkan!).

- Relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$:



- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari *a* ke *b*, maka juga ada busur dari *b* ke *a*.
- Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:



- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

Komposisi Relasi

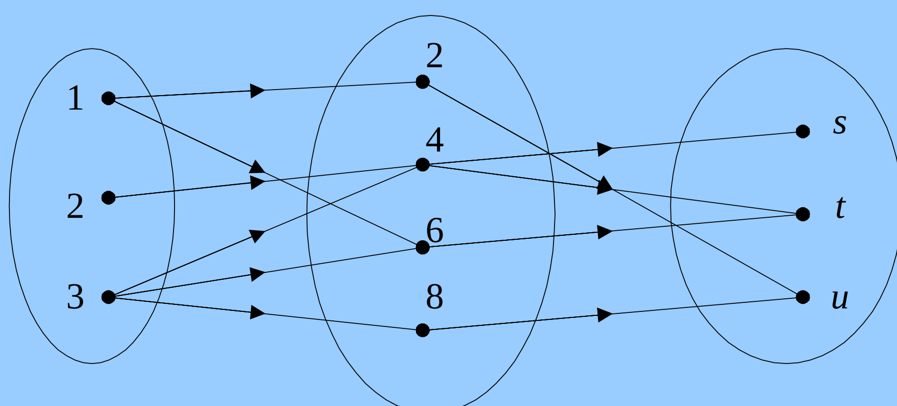
- Misalkan *R* adalah relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, dan *S* adalah relasi dari himpunan *B* ke himpunan *C*. Komposisi *R* dan *S*, dinotasikan dengan $\boldsymbol{S \circ R}$, adalah relasi dari *A* ke *C* yang didefinisikan oleh:

  $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk beberapa $b \in B$, $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S\ \}$

Contoh:

- Misalkan $\boldsymbol{R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}}$ adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan $\boldsymbol{S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}}$ adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {*s*, *t*, *u*}.
- Maka komposisi relasi *R* dan *S* adalah:

  $\boldsymbol{S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\ \}}$



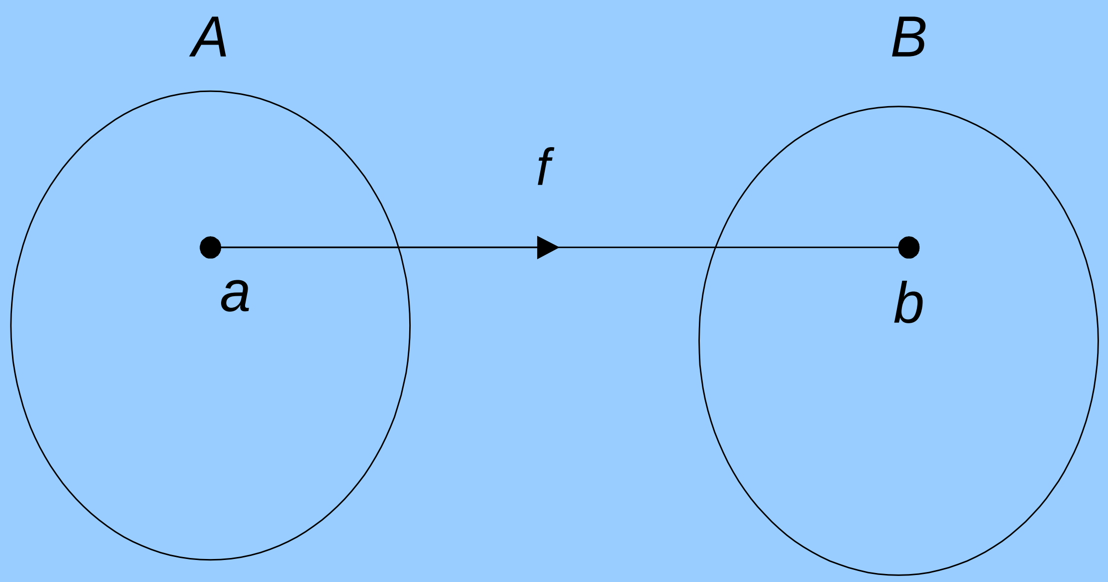
Fungsi

- Misalkan *A* dan *B* himpunan.
- Relasi biner *f* dari *A* ke *B* merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam *A* dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*.
- Jika *f* adalah fungsi dari *A* ke *B* kita menuliskan

  $f : A \rightarrow B$ yang artinya *f* **memetakan** *A* ke *B*.
- *A* disebut **daerah asal** (*domain*) dari *f* dan *B* disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari *f*.
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.
- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen *a* di dalam *A* dihubungkan dengan elemen *b* di dalam *B*.

Fungsi

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b.
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut.

   Seperti pada relasi.

2. Formula pengisian nilai (*assignment*).

   Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.

3. Kata-kata

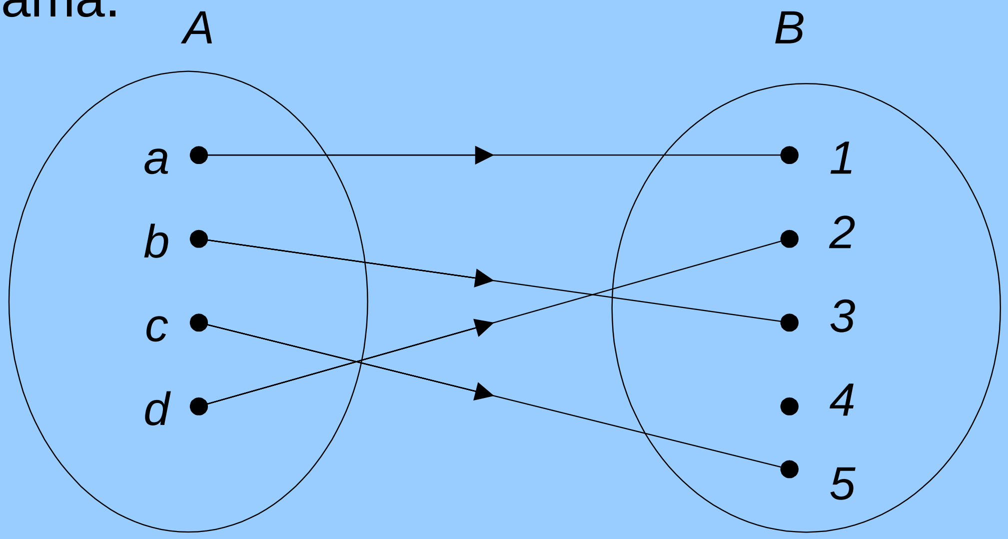
   Contoh: “*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner”.

4. Kode program (*source code*)

   Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
  if x < 0 then
  abs:=-x
  else
  abs:=x;
end;
```

- Fungsi *f* dikatakan **Satu-ke-satu (*one-to-one*)** atau **Injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.

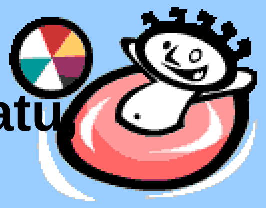


Contoh:

- $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah **fungsi satu-ke-satu**,
- $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ **bukan fungsi satu-ke-satu**, karena $f(1) = f(2) = u$.



Contoh:

Misalkan $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

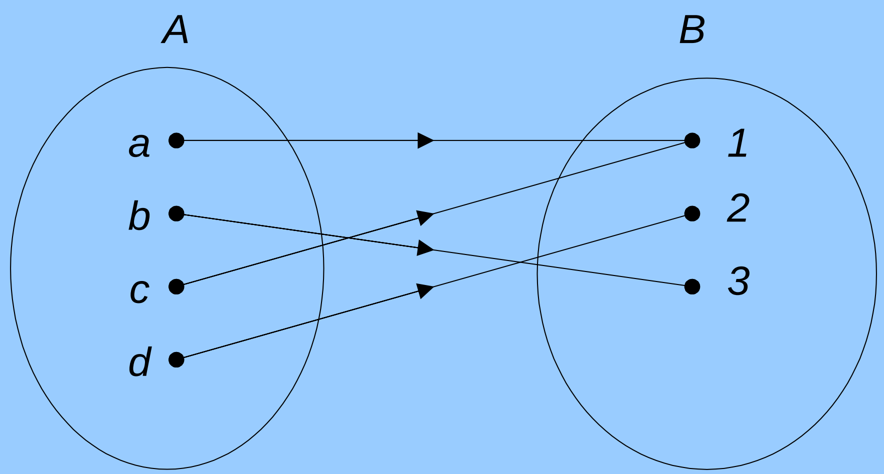
<u>Penyelesaian</u>:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ **bukan fungsi satu-ke-satu**, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah **fungsi satu-ke-satu** karena untuk $a \neq b$, $a - 1 \neq b - 1$.

Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **Pada** (*onto*) atau **Surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.
- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



Contoh:

- $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ **bukan fungsi pada** karena *w* tidak termasuk jelajah dari *f*.

- $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan **fungsi pada** karena semua anggota *B* merupakan jelajah dari *f*.

Contoh:

Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ **bukan fungsi pada**, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari *f*.

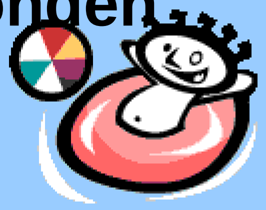
(ii) $f(x) = x - 1$ adalah **fungsi pada** karena untuk setiap bilangan bulat *y*, selalu ada nilai *x* yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

- Fungsi *f* dikatakan **Berkoresponden Satu-ke-satu** atau **Bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

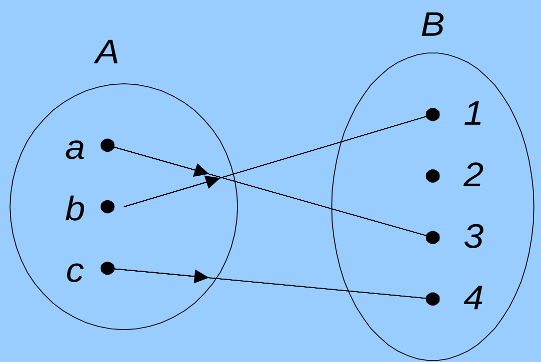
Contoh:

- *f* = {(1, *u*), (2, *w*), (3, *v*)}

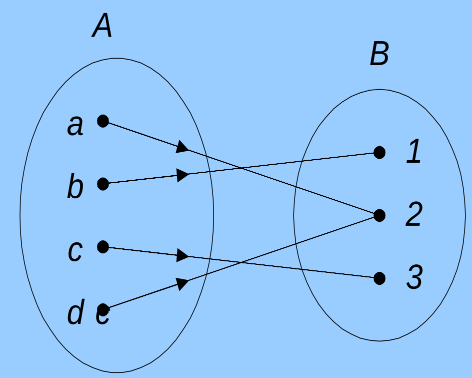
  dari *A* = {1, 2, 3} ke *B* = {*u*, *v*, *w*} adalah fungsi yang **berkoresponden satu-ke-satu**, karena *f* adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.
- $f(x) = x – 1$ merupakan fungsi yang **berkoresponden satu-ke-satu**, karena *f* adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.



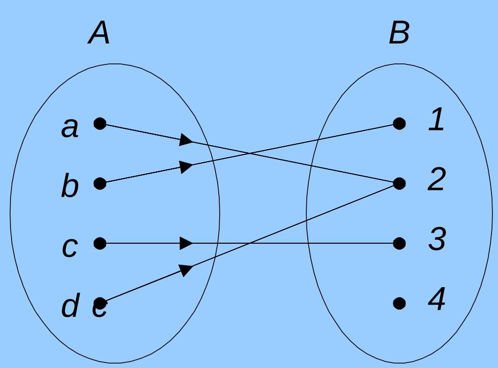
Fungsi satu-ke-satu,
bukan pada



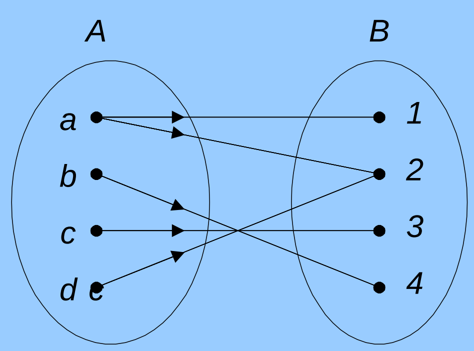
Fungsi pada,
bukan satu-ke-satu



Buka fungsi satu-ke-satu
maupun pada



Bukan fungsi



Balikan (Invers)

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari f.
- Balikan fungsi dilambangkan dengan $\boldsymbol{f^{-1}}$. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

Contoh

- $\boldsymbol{f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}}$

  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Balikan fungsi f adalah $\boldsymbol{f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}}$

Komposisi

- Komposisi dari dua buah fungsi.
- Misalkan *g* adalah fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, dan *f* adalah fungsi dari himpunan *B* ke himpunan *C*.
- Komposisi *f* dan *g*, dinotasikan dengan $\boldsymbol{f \circ g}$, adalah fungsi dari *A* ke *C* yang didefinisikan oleh

  $$\boldsymbol{(f \circ g)(a) = f(g(a))}$$

Komposisi

Contoh

- Diberikan $\boldsymbol{g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}}$
  yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$,
  dan fungsi $\boldsymbol{f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}}$
  yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$.
- Fungsi komposisi dari A ke C adalah
  $\boldsymbol{f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}}$

Contoh

- Diberikan fungsi $\boldsymbol{f(x) = x - 1}$ dan $\boldsymbol{g(x) = x^2 + 1}$.
  Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

<u>**Penyelesaian**</u>**:**

(i) $\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2}$.

(ii) $\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2}$.

Referensi

- Munir, R., 2005, Matematika Diskrit, Penerbit IF, Bandung
- A. Rosen, H Kenneth (2012). Discrete Mathematics and Its Applications. Mc Graw Hill.
- Siang, J.J., 2002, Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer